DM n°1 : Second degré

Exercice 1 (Travail en binôme (*))
Deux ouvriers, $M^r A$ et $M^r B$, doivent faire un certain travail. Si chacun en exécutait successivement la moitié, ils mettraient en tout $12h30$ pour l'achever. En travaillant ensemble, chacun gardant son propre rythme de travail, ils ne mettent que $6h$. Combien de temps mettrait chacun des ouvriers pour faire ce travail seul ?

Exercice 2 (Conjecturer (*))
Déterminer les résultats des calculs ci-dessous, observer ces résultats puis émettre une conjecture concernant ce type de calcul. Prouver ou infirmer ensuite la conjecture émise.

- $P(1) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$
- $P(2) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1$
- $P(3) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1$
- $P(4) = 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1$

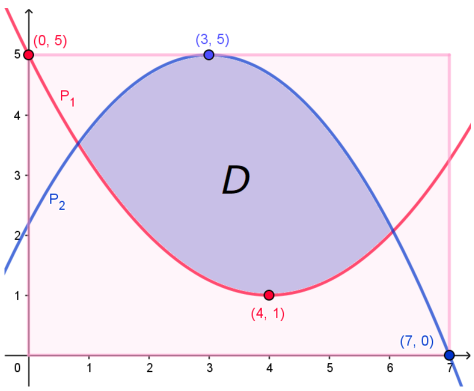
Exercice 3 (Extrémums locaux d'un polynôme du 3e degré (**))
Pour chercher l'abscisse des extrémums locaux du polynôme du 3e degré $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, le mathématicien occitan Pierre Fermat (1601-1655) procédait ainsi :

- il considère deux nombres x et $x + \lambda$, avec $\lambda \neq 0$
- il écrit l'égalité $P(x) = P(x + \lambda)$, puis il simplifie cette égalité par λ
- il pose $\lambda = 0$ dans l'égalité simplifiée et il en tire les abscisses des extrémums cherchées

Appliquer cette méthode pour la fonction $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ et vérifier le résultat trouvé en traçant la courbe de f à la calculatrice.
Appliquer cette méthode d'une manière générale pour la fonction P : donner la formule qui permet de calculer les abscisses cherchées en fonction de a, b, c et d.
Commenter cette méthode (le procédé vous parait-il correct ? honnête ? s'applique t-il à d'autres fonctions ? etc.)

Exercice 4 (Calcul d'aire (**))
Nous voulons déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine D grisé sur la figure ci-contre par la méthode de Monte-Carlo. Pour cela, il faut déterminer le système d'inéquations que doit vérifier un point $M(x; y)$ de ce domaine.

1. Sachant que les deux courbes qui limitent D sont des paraboles, à l'aide des informations portées dans la figure (pour chaque parabole, les coordonnées de l'optimum et d'une intersection avec un des axes), déterminer les équations des courbes P_1 et P_2.
2. En déduire le système S d'inéquations vérifié par un point quelconque $M(x; y)$ de D.
3. Écrire le programme « domaine » décrit ci-dessous, l'exécuter $n = 10\,000$ fois et conclure.



Le programme « domaine » tire aléatoirement des nombres $0 \leqslant x < 7$ et $0 \leqslant x < 5$ puis examine si ces nombres vérifient le système S, auquel cas il en conclut que ce sont les coordonnées d'un point M de D. Cette procédure est recommencée un très grand nombre n de fois, en comptabilisant à chaque fois les points qui sont dans D. Par comparaison avec le nombre total de points tirés, on peut ainsi estimer la part de l'aire du rectangle de côtés 7 et 5 qui est occupé par D. Le programme affiche donc, en sortie, l'estimation trouvée de l'aire de D.

Exercice 5 (Recherche des racines évidentes (***))

Nous voulons mettre à profit cette remarque du cours *si un polynôme à coefficients entiers a une racine entière, ce ne peut être qu'un diviseur du terme constant*, pour écrire un programme qui recherche systématiquement toutes les racines entières d'un polynôme P de degré quelconque et qui affiche la factorisation qui en résulte. Dans le cas d'un polynôme résiduel du 2e degré, si le discriminant est négatif, le programme pourra annoncer que la factorisation est ultime.

1. Écrire le programme
2. Tester ce programme sur les quelques polynômes suivants :
   - $P_1(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$
   - $P_2(x) = 6x^3 + 3x^2 - 27x + 12$
   - $P_3(x) = -5x^3 + 45x^2 - 130x + 120$
   - $P_4(x) = x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 48x - 36$
   - $P_5(x) = 2x^4 - 13x^3 - 7x^2 + x - 7$
   - $P_6(x) = x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 28x - 16$
   - $P_7(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18$
   - $P_8(x) = x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 4x + 1$
   - $P_9(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 - x^2 - 3x - 2$
   - $P_{10}(x) = x^7 - 3x^6 + 3x^5 - x^4 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ (celui de l'exercice précédent).

Exercice 6 (le coin du chercheur (***))

Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré 2 à coefficients entiers, inférieurs ou égaux en valeur absolue à un entier n. Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ par exemple appartient à E_3, et aussi à E_4, E_5,…, mais pas à E_2 ni à E_1.

➩ Quelle est la proportion $F(1, n)$ des polynômes de E_n qui n'ont pas de racine ?

Répondre à cette question pour les premières valeurs de n en vous aidant d'un programme.

En utilisant ce même programme, répondre aux questions suivantes :

➩ Quelle est la proportion $F(2, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines rationnelles (sans tenir compte de la multiplicité) ? Quelle est la proportion $F(3, n)$ des polynômes de E_n qui ont des racines irrationnelles positives ? À partir de quelle valeur de n, parmi les équations de E_n ayant 2 racines positives, y a t-il davantage de racines irrationnelles que rationnelles ?

Correction de l'exercice 1 (Travail en binôme (*))

Appelons t_A et t_B les durées pour accomplir le travail cherchées.
Si chacun accomplit la moitié du travail, cela dure $\frac{t_A}{2} + \frac{t_B}{2} = 12,5$.
En $1h$ de temps, $M^r A$ exécute $\frac{1}{t_A}$ du travail total et $M^r B$ en exécute $\frac{1}{t_B}$.
Ensemble, ils exécutent en $1h$: $\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B}$ du travail.
Or, le travail réalisé en $1h$ représente $\frac{1}{6}$ du travail total.
On en déduit l'égalité $\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow \frac{t_A+t_B}{t_A t_B} = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow 6(t_A + t_B) = t_A t_B$.
Il faut donc résoudre le système : $\begin{cases} t_A + t_B = 2 \times 12,5 \\ 6(t_A + t_B) = t_A t_B \end{cases}$ soit $\begin{cases} t_A + t_B = 25 \\ t_A t_B = 6 \times 25 = 150 \end{cases}$
t_A et t_B sont donc les solutions conjuguées de l'équation $t^2 - 25t + 150 = 0$.
On trouve $t_A = \frac{25+\sqrt{25}}{2} = 15$ et $t_B = \frac{25-\sqrt{25}}{2} = 10$ (ou l'inverse).

Correction de l'exercice 2 (Conjecturer (*))

On trouve

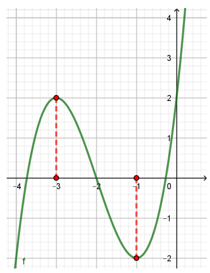
- $P(1) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2$
- $P(2) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2$
- $P(3) = 3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361 = 19^2$
- $P(4) = 4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2$

$\boxed{\text{Conjecture n°1}}$: les nombres $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ sont des carrés pour tout n.
Pour prouver cette conjecture, commençons par développer : $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1$.
Au vu de ce développement, si ce polynôme du 4e degré est un carré, ce doit être le carré de n^2+bn+1 (d'une façon évidente les coefficient a et c du trinôme doivent être égaux à 1).
Développons donc maintenant : $(n^2+bn+1)^2 = n^4 + 2bn^3 + (b^2+2)n^2 + 2bn + 1$.
Par identification, on doit avoir $2b = 6$ et $b^2 + 2 = 11$.
La 1re de ces égalités donne $b = 3$ et cette valeur vérifie bien la 2e égalité, d'où $P(n) = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n+1)^2$.

$\boxed{\text{Conjecture n°2}}$: les nombres $P(n)$ sont des carrés de nombres premiers.
Cette conjecture se vérifie pour $n = 1, 2, 3, 4$ et on peut pousser jusqu'à calculer $P(5) = 41^2$.
En effet, $5, 11, 19, 29, 41$ sont des nombres premiers.
Le calcul de $P(6) = 55^2$ cependant nous montre que cette conjecture est fausse en général car $55 = 5 \times 11$ n'est pas premier.

Correction de l'exercice 3 (Extrémums locaux d'un polynôme du 3e degré (**))

Appliquons la méthode de Fermat à $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 2$.
Écrivons $f(x) = f(x+\lambda)$: $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = (x+\lambda)^3 + 6(x+\lambda)^2 + 9(x+\lambda) + 2$.
Transformons cette égalité : $x^3+6x^2+9x+2 = x^3+(3\lambda+6)x^2+(3\lambda^2+12\lambda+9)x+(\lambda^3+6\lambda^2+9\lambda+2)$.
En regroupant les termes : $3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + 12\lambda)x + (\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda) = 0$.
En simplifiant par $\lambda \neq 0$: $3x^2 + (3\lambda + 12)x + (\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0$.
En posant $\lambda = 0$ on obtient : $3x^2 + 12x + 9 = 0$ qui se simplifie en $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Les solutions de cette équation sont $x = \frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} = -2 \pm 2$, soit -1 et -3, ce qui conduit à l'affirmation (correcte) que la fonction $f : x \mapsto x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ admet des extrémums locaux en -1 et -3.
Une simple vérification graphique permet de s'assurer de cela.



D'une manière plus générale, la méthode de Fermat permet de montrer que la fonction

$$P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

admet des extrémums locaux lorsque $b^2 - 3ac \geqslant 0$.
Ces extrémums ont pour abscisses les solutions de l'équation $3ax^2 + 2bx + c = 0$, soit $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$.
NB : Cette méthode qui n'utilise pas la fonction dérivée (le concept n'existait pas à l'époque de Fermat), donne un résultat satisfaisant qui repose sur un théorème qui sera étudié en classe de terminale (le théorème de Rolle). Rapidement, ce théorème stipule que si, pour deux valeurs x et x' d'un même intervalle, une fonction prend la même valeur, alors il existe au moins une valeur dans l'intervalle $[x; x']$ pour laquelle la fonction admet un extrémum.
On peut souligner l'audace de cette méthode qui commence par supposer que $\lambda \neq 0$ (pour pouvoir simplifier par λ), puis qui achève le calcul en prenant $\lambda = 0$!
Le procédé s'applique à d'autres fonctions, il suffit d'être dans les conditions d'application du théorème de Rolle : une fonction continue (la courbe peut se tracer sans lever le crayon) sur $[x; x']$ et dérivable (la courbe n'a pas de points anguleux) sur $]x; x'[$.
Essayer la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{2(x-1)} - 2$ pour $x > 1$.

Correction de l'exercice 4 (Calcul d'aire (**))

1- Déterminons l'équation de P_1 :
On sait que :

$$\begin{cases} c_1 = 5 \text{ (ordonnée à l'origine)} \\ \frac{-b_1}{2a_1} = 4 \text{ (abscisse du minimum)} \\ 16a_1 + 4b_1 + c_1 = 1 \text{ (ordonnée du minimum)} \end{cases}$$

En remplaçant c_1 par 5 et b_1 par $-8a_1$, on obtient :

$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ b_1 = -8a_1 \\ 16a_1 + 4(-8a_1) + 5 = 1 \iff -16a_1 = -4 \iff a_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Finalement, $\boxed{\text{l'équation de } P_1 \text{ est } y = \frac{x^2}{4} - 2x + 5}$
Déterminons l'équation de P_2 :
On sait que :

$$\begin{cases} 49a_2 + 7b_2 + c_2 = 0 \text{ (image de la racine 7)} \\ \frac{-b_2}{2a_2} = 3 \iff b_2 = -6a_2 \text{ (abscisse du maximum)} \\ 9a_2 + 3b_2 + c_2 = 5 \text{ (ordonnée du maximum)} \end{cases}$$

En remplaçant b_2 par $-6a_2$, on obtient :

$$\begin{cases} 49a_2 + 7(-6a_2) + c_2 = 0 \iff 7a_2 + c_2 = 0 \\ b_2 = -6a_2 \\ 9a_2 + 3(-6a_2) + c_2 = 5 \iff -9a_2 + c_2 = 5 \end{cases}$$

En soustrayant la 3e de la 1re, j'obtiens $7a_2 + c_2 - (-9a_2 + c_2) = -5 \iff 16a_2 = -5 \iff a_2 = \frac{-5}{16}$.
En reportant cette valeur, je trouve $b_2 = -6a_2 = \frac{30}{16}$ et $c_2 = -7a_2 = \frac{35}{16}$.
$\boxed{\text{L'équation de } P_2 \text{ est donc } y = \frac{-5x^2+30x+35}{16}}$
Autre méthode :
Il est plus simple, lorsqu'on connait les coordonnées de l'extrémum, d'utiliser la forme canonique $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où (α, β) sont les coordonnées de l'extrémum.
Pour l'équation de P_1, on peut écrire $y = a(x-4)^2 + 1$.
Le coefficient a est déterminé par l'autre condition : $5 = a(0-4)^2 + 1 = 16a + 1 \iff a = \frac{5-1}{16} = \frac{1}{4}$.

De même, pour l'équation de P_2, on peut écrire $y = a(x-3)^2+5$.
Le coefficient a est déterminé par l'autre condition : $0 = a(7-3)^2+5 = 16a+5 \iff a = \frac{-5}{16}$.

2- Comme, pour être dans D, il faut être au-dessus de P_1 et au-dessous de P_2, le système S d'inéquations que doit vérifier un point de D est :

$$\begin{cases} y \geqslant \frac{x^2}{4} - 2x + 5 \\ y \leqslant \frac{-5x^2+30x+35}{16} \end{cases}$$

3- Le programme décrit dans l'énoncé est écrit ci-dessous en Python. Pour générer un nombre de $[0;7[$, il suffit de multiplier par 7 le nombre aléatoire proposé par la fonction `random` qui est disponible dans tous les langages de programmation et qui génère un nombre réel aléatoire de $[0;1[$ comme $0,48592855472012$ par exemple.

```
from random import random

N=int(input("Combien d'essais? "))
Total=0
for I in range(N):
    x=random()*7
    y=random()*5
    if x**2/4-2*x+5<=y and (-5*x**2+30*x+35)/16>=y :
        Total=Total+1
print("Fréquence des points de D= {} ".format(Total/N))
print("Estimation de l'aire de D= {} ".format(Total/N*35))
```

```
Combien d'essais? 10000                 Combien d'essais? 1000000
Fréquence des points de D= 0.3846       Fréquence des points de D= 0.386116
Estimation de l'aire de D= 13.461       Estimation de l'aire de D= 13.51406
```

Le résultat pour un échantillon de $n = 10000$ tirages me donne $aire \approx 13,461$.
Avec un échantillon 100 fois plus grand, je trouve $aire \approx 13,514$.
Cette méthode fournit une estimation aussi précise qu'on le souhaite, il suffit d'augmenter le nombre de tirages.

Correction de l'exercice 5 (Recherche des racines évidentes (***))

Non corrigé pour le moment car toujours au programme du DM n°2

Correction de l'exercice 6 (le coin du chercheur (***))

Non corrigé pour le moment car toujours au programme du DM n°2